Kartkówka 15.03.2018

Zadanie 1. Funkcja F jest zadana wzorem

$$F(x) = \int_0^x t \ln t \,\mathrm{d}t.$$

Obliczyć $F(2)$ i $F'(2)$.

Zacznijmy od obliczenia całki nieoznaczonej, całkując przez części:

$$\begin{aligned}\int t \ln t \,\mathrm{d}t &= \int \left(\tfrac{t^2}{2}\right)' \ln t \,\mathrm{d}t \\ &= \tfrac{t^2}{2} \cdot \ln t - \int \tfrac{t^2}{2} \cdot \tfrac{1}{t} \,\mathrm{d}t \\ &= \tfrac{1}{2} t^2 \ln t - \tfrac{1}{4} t^2 + C.\end{aligned}$$

Przykładową funkcją pierwotną jest więc funkcja $G\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$G(t) = \tfrac{1}{2} t^2 \ln t - \tfrac{1}{4} t^2.$$

Istnieje skończona granica $\lim_{t \searrow 0} G(t) = 0$, co pozwala dookreślić G jako funkcję ciągłą $G\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ poprzez $G(0) = 0$. Obliczamy więc

$$F(2) = G(2) - G(0) = 2 \ln 2 - 1.$$

Mając wzór na funkcję F (mianowicie $F(x) = G(x) - G(0)$), możemy bezpośrednio obliczyć pochodną. Nie jest to jednak konieczne, gdyż G wyznaczyliśmy jako funkcję pierwotną dla $t \ln t$. Mamy więc

$$\begin{aligned}&F'(x) = G'(x) - (G(0))' = x \ln x, \\ &F'(2) = 2 \ln 2.\end{aligned}$$

Ze względu na powtarzający się w rozwiązaniach błąd podkreślę, że na potrzeby powyższego rachunku wartości $G(0), G'(0)$ nie mają znaczenia; wyraz $G(0)$ po prostu znika przy różniczkowaniu jako stała.

Uwaga. Pierwotnie zadanie miało dotyczyć funkcji $F(x) = \int_1^x t \ln t \,\mathrm{d}t$, dla której rozwiązanie jest prostsze – całka jest właściwa, więc nie trzeba liczyć granicy, a odpowiedzi na drugie pytanie ($F(2) = 2 \ln 2$) można udzielić niejako z automatu. Liczba 0 pojawiła się przez niedopatrzenie. W związku z tym zadanie było sprawdzane odpowiednio łagodniej.

Zadanie 2. Podać wzór na odległość euklidesową $\|x-y\|$ dwóch punktów $x, y \in \mathbb{R}^n$. Co według definicji oznacza zbieżność $x_k \to x$, gdzie $x_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n) \in \mathbb{R}^n$ jest ciągiem punktów w $\mathbb{R}^n$?

Norma euklidesowa jest zadana wzorem $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, a więc odległość dwóch punktów $x, y \in \mathbb{R}^n$ to

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Powyżej przyjąłem (tak jak zwykle) $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Według definicji, zbieżność oznacza dokładnie, że $\|x_k - x\| \xrightarrow{k\to\infty} 0$, czyli że odległość punktów x_k od x zbiega do zera. Użyta tutaj norma $\|\cdot\|$ jest euklidesowa, ale użycie innej normy prowadzi do równoważnego warunku na zbieżność.

Równoważny powyższej definicji jest warunek

$$x_k^j \xrightarrow{k\to\infty} x^j \qquad \text{dla każdego } j = 1, \ldots, n,$$

który można uznać za alternatywną definicję. Tym razem przyjąłem (mniej standardowo) $x = (x^1, \ldots, x^n)$, żeby odróżnić indeksy odpowiadające kolejnym współrzędnym od indeksów odpowiadających kolejnym punktom ciągu.